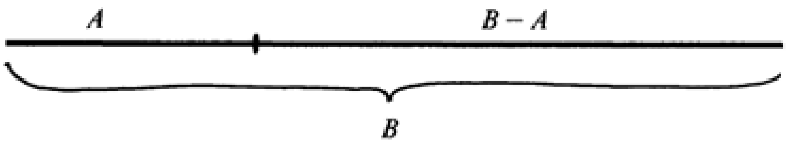
Đạo hàm là gì?

toanhoctuoidep.wordpress.com/2014/08/08/dao-ham-la-gi-3
8 tháng 8, 2014

Một hôm, có một em học sinh chặn tôi lại và bất chợt hỏi: “*Thưa Thầy, rốt cuộc thì đạo hàm là gì ạ?*” Tôi cảm thấy hơi lúng túng bèn trả lời em học sinh đó một cách vô thưởng vô phạt: “*À, trong tiếng hán thì Đạo có nghĩa là con đường, thế nên đạo hàm là khái niệm ám chỉ con đường vận động và biến đổi của hàm số…*“. Về nhà nghĩ lại thì thấy trả lời kiểu đó cũng như không trả lời, vậy nên tôi quyết định viết bài này.

Nếu phải tóm tắt lại lịch sử phát triển hơn 200 năm của đạo hàm chỉ trong một câu thì tôi sẽ trích dẫn lời của tác giả Grabiner: “*Đạo hàm đầu tiên được sử dụng như công cụ, sau đó mới được phát minh, tiếp nữa là được mở rộng và phát triển, cuối cùng mới được định nghĩa.*” Thế nghĩa là thế nào? Nghĩa là trước khi được phát minh ra, người ta đã biết cách sử dụng nó như một công cụ đầy hiệu quả. Để hiểu đầu cua tai nheo thì chúng ta phải quay trở về những năm 1630 để tìm hiểu một phương pháp tìm cực trị mới mẻ mà Fermat đã nghĩ ra:
Ông xét bài toán sau: Cho trước một đoạn thẳng, hãy chia nó thành 2 phần sao cho tích của 2 phần này là lớn nhất

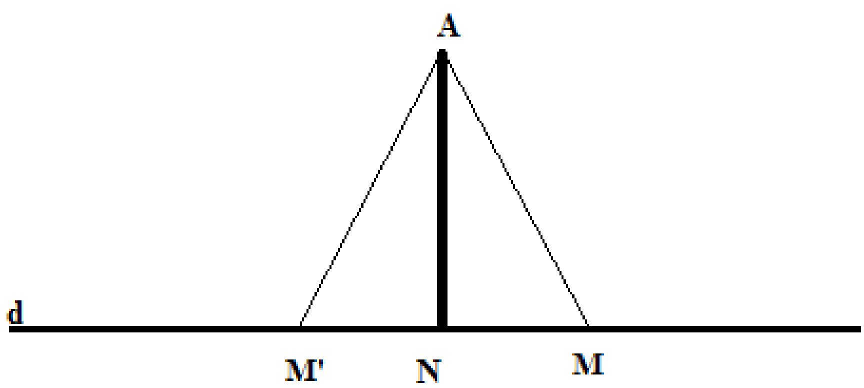


Đáp án của bài toán này thì người ta đã biết từ trước (tích lớn nhất khi ta chia đoạn thẳng thành 2 phần bằng nhau) nhưng cách làm của Fermat thì lại rất mới. Gọi chiều dài đoạn ban đầu là B, chiều dài đoạn thứ nhất là A thì chiều dài đoạn thứ hai sẽ là:B-A và tích của 2 phần là:.

$$A.(B-A) = AB - A^2$$

Nhà toán học Hi Lạp Pappus ở Alexandria trong một tác phẩm của mình có đưa ra một nguyên lý: “Một bài toán nào đó nói chung có 2 nghiệm thì nó sẽ đạt được giá trị cực đại (hoặc cực tiểu) trong trường hợp chỉ có một nghiệm”. Tôi sẽ dành một chút thời gian để minh họa nguyên lí này của Pappus bởi vì đây là một nguyên lí rất thú vị và có ích:

Xét bài toán đơn giản sau: Từ điểm A nằm ngoài đường thẳng d cho trước, hãy xác định điểm N trên d sao cho độ dài đoạn AN là nhỏ nhất?



Bây giờ chúng ta hãy giả vờ khờ khạo không biết điểm N cần tìm ở đâu, lúc này hãy giả sử chúng ta tìm được một điểm M nào đó nằm bên phải thõa mãn yêu cầu đề bài (tức là làm cho đoạn AM nhỏ nhất). Khi đó nói chung luôn có một điểm M’ nằm bên trái để cho AM = AM’ cho nên nếu M là nghiệm của bài toán này thì M’ cũng phải là nghiệm và bài toán sẽ luôn có 2 nghiệm. Nguyên lý Pappus phát biểu rằng, giá trị cực tiểu sẽ đạt được trong trường hợp chỉ có một nghiệm, mà muốn vậy thì $M \equiv M'$. Điều này chỉ xảy ra khi M chính là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống d và đây cũng chính là đáp án của bài toán này. Ví dụ này mặc dù khá tầm thường nhưng nguyên lí của Pappus thì lại rất hữu ích trong nhiều trường hợp tìm cực trị khác nhau. Nào bây giờ hãy trở lại với Fermat:

Ông giả sử rằng bài toán trên còn có thêm một đáp số thứ hai nữa (tức là có một cách chia khác để tích hai đoạn lớn nhất), với đáp số thứ hai này chúng ta sẽ gọi đoạn thứ nhất là $A + E$ khi đó đoạn còn lại là: $B - A - E$. Tích của chúng lúc này bằng:.

$$AB - A^2 - 2AE + BE - E^2$$

Bởi vì giá trị lớn nhất phải là duy nhất cho nên hai đáp số trên đều phải cho ra tích giống nhau, nghĩa là:

$$AB - A^2 - 2AE + BE - E^2 = AB - A^2 \Leftrightarrow 2AE + E^2 = BE.$$

Rút gọn 2 vế cho E ta được: $2A + E = B$

Mặt khác theo nguyên lý Pappus thì 2 nghiệm này trong trường hợp đạt giá trị lớn nhất phải trở nên bằng nhau nên nói chung E không hề tồn tại. Thế là Fermat cho E = 0, từ đó ông thu được kết quả $A = \frac{B}{2}$, mà đây cũng chính là đáp số của bài toán trên. Cách làm của Fermat có cái gì đó vừa độc đáo vừa kì quái, ông giả sử rằng bài toán có 2 nghiệm và chúng khác nhau một lượng E. Lúc đầu ông xem E khác 0 và rút gọn E ở hai vế, sau đó ông ta vận dụng nguyên lí Pappus và nói rằng muốn đạt được cực trị thì nói chung E không nên tồn tại và thế là cho E = 0 cuối cùng lại thu được đáp số chính xác. Nếu bạn thấy cách làm này thật quái lạ thì bạn giống với đa số các nhà toán học thời kì đó, còn với thì hiện tại khi mà chúng ta đã học về đạo hàm tôi sẽ chỉ rõ để các bạn hiểu được rốt cuộc thì Fermat đã làm cái gì để giải được bài toán đó.

Bài toán mà Fermat giải là xác định A để hàm số $f(A)$ lớn nhất, và việc Fermat xem sau đó rút gọn biểu thức cho E rồi cho $E = 0$ nếu nói theo ngôn ngữ ngày nay là ông đã sử dụng đặc trưng sau đây của hàm số tại điểm cực trị của nó:

$$f(A+E) = f(A) \Leftrightarrow f(A+E) - f(A) = 0$$

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(A+E) - f(A)}{E} = 0 \Leftrightarrow f'(A) = 0$$

Nếu bạn đã học lớp 12 thì chắc đã được nghe đến định lí Fermat về điều kiện cần để hàm số đạt cực trị rồi chứ. Vâng, chính nó đấy! Nhưng vào thời điểm này Fermat chưa biết đạo hàm là gì đâu, dù vậy có một sự kiện lý thú là Fermat đã ứng dụng phương pháp này vào các bài toán vật lí và thu được những kết quả rất phù hợp. Cụ thể ông đã áp dụng trong quang học: Fermat phát biểu một nguyên lý về cách "hành xử" của ánh sáng (nguyên lý tác dụng tối thiểu): "Ánh sáng luôn đi theo con đường nhanh nhất". Theo nguyên lý này và khảo sát đường đi của ánh sáng ngang qua bề mặt phân cách của hai môi trường trong suốt đồng tính ông đã tìm con đường nhanh nhất của ánh sáng (bằng phương pháp mới ở trên) , chính là con đường tuân theo định luật Snell về khúc xạ (vốn đã tìm ra trước đó bằng thực nghiệm)/ *Nếu có thời gian bạn hãy đọc thêm bài viết "Tự nhiên là nhà toán học" của tôi để hiểu thêm nhé.*

Giai đoạn tiếp theo là thời điểm đạo hàm được phát minh. Đạo hàm ra đời lấy cảm hứng từ hai nguồn động lực chính. Động lực này đến từ nhu cầu phải giải quyết hai bài toán quan trong trong hai lĩnh vực khác nhau. Một đến từ hình học đó là bài toán xác định tiếp tuyến của đường cong và một đến từ vật lí là bài toán xác định vận tốc tức thời của chất điểm. Cùng tìm hiểu nhé…

Nếu các bạn đã học đạo hàm rồi thì sẽ thấy nó được định nghĩa như sau: Đạo hàm của hàm $y = f(x)$ tại x_o được xác định bằng giới hạn:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

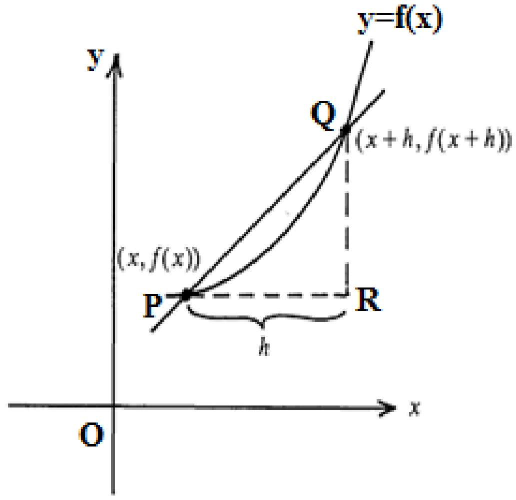
Và nếu bạn đặt: $h = x - x_o$ thì $x = x_o + h$ và đạo hàm được viết lại ở một dạng khác tương đương:

$$f'(x_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$$

(Trong một số sách giáo khoa người ta có thể dùng kí hiệu Δx thay cho h)

Vấn đề là tại sao nó lại được định nghĩa như thế? Tôi sẽ trả lời các bạn bằng cách chỉ ra cách mà người ta tìm ra để xác định được tiếp tuyến của một đường cong.

Xét đường cong có phương trình $y = f(x)$, đầu tiên chúng ta sẽ vẽ một đường thẳng cắt ngang đường cong này tại 2 điểm P và Q:



Chắc các bạn cũng biết là để viết phương trình một đường thẳng chúng ta cần xác định được hệ số góc của nó. Kiến thức lớp 7 nói rằng hệ số góc của đường thẳng là tan của góc tạo bởi đường thẳng đó với trục hoành Ox. Chẳng hạn, đối với đường thẳng PQ ở trên thì hệ số góc của nó sẽ là:

$$tan\widehat{QPR} = \frac{QR}{PR} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Bây giờ chẳng hạn ta muốn xác định tiếp tuyến của đường cong tại điểm P. Làm thế nào để đường thẳng PQ biến thành tiếp tuyến đây, các nhà toán học đã nghĩ ra một phương án thú vị: Họ cho điểm Q tiến dần về điểm P, lúc đó thì rõ ràng đường thẳng PQ từ chỗ cắt đường cong tại 2 điểm P, Q nay sẽ chỉ còn cắt tại một điểm P và thế là "trở thành" tiếp tuyến còn gì :). Mọi người có đồng ý là khi $Q \to P$ đồng nghĩa với việc $h \to 0$ không nào. Như vậy bằng cách cho $h \to 0$ trong công thức tính hệ số góc của đường PQ ở trên chúng ta sẽ thu được hệ số góc của tiếp tuyến cần tìm. Ngặt nỗi, thời điểm đó người ta chưa phát minh ra lý thuyết về giới hạn (sau này đó là công lao của Cauchy). Và thế là mọi người bèn bắt chước theo cách mà Fermat đã làm: đầu tiên họ cứ xem h là khác 0 rồi tìm cách rút gọn nó đi ở tử và mẫu, sau đó rồi thì xem h bằng 0 rồi triệt tiêu nó đi…
Cách giải quyết kì lạ này lại thu được những thành công đến không ngờ, người ta đã giải quyết được bài toán xác định tiếp tuyến "khó nhằn" trước đó. Thế nhưng rất nhiều người khác gào lên bất mãn, thế là thế quái nào, sao lúc đầu xem h là khác 0 (để thoải mái rút gọn) rồi sau đó lại cho nó bằng 0, vậy rút cuộc nó là cái loại gì? Những người phát minh ra phương pháp này gọi h là "vô cùng bé", có người còn đặt cho nó một cái tên khá là ma quái: "bóng ma của những đại lượng đã mất".

Câu hỏi này đã ám ảnh giới toán học rất lâu, mãi cho tới sau này khi Cauchy xây dựng hoàn chỉnh lý thuyết giới hạn thì bức màn bí ẩn mới được vén lên rõ ràng. Để tìm hệ số góc của tiếp tuyến: việc chúng ta cần làm là cho h tiến dần về 0 (tiến dần về nghĩa là càng ngày càng gần 0 nhưng không bao giờ bằng 0 nhé) và quan sát xem tỉ số $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ đang tiến dần về giá trị nào. Cái giá trị mà tỉ số này đang "tiến về" chính là thứ chúng ta muốn tìm. Tất nhiên là để tìm giới hạn này cần những kĩ thuật phù hợp, và cách làm của Fermat ở một chừng mực nào đó có thể xem là "xài được".

Newton và Leibniz được lịch sử công nhận là độc lập với nhau phát minh ra giải tích và khái niệm đạo hàm nói riêng. Leibniz xuất phát từ việc giải quyết bài toán tiếp tuyến đã đưa ra khái niệm "vi phân" và xây dựng đạo hàm theo khái niệm này (thật tiếc vì thời lượng bài viết không cho phép tôi nói chi tiết thêm về cách xây dựng của Leibniz). Trong khi đó Newton phát minh ra đạo hàm trong một hoàn cảnh rất đặc thù: ông phát minh ra giải tích chỉ như sáng tạo ra công cụ thích hợp để phục vụ cho các tính toán trong một lý thuyết vĩ đại mà sau này đã đặt nền móng cho cơ học cổ điển: Thuyết vạn vật hấp dẫn.
Đạo hàm được Newton phát minh ra giúp ông giải quyết được bài toán xác định vận tốc, gia tốc chất điểm. Và ở đây ông đã cho đạo hàm một ý nghĩa tổng quát và mang trong mình một sức mạnh to lớn không thể tưởng tượng: *Đạo hàm cho chúng ta biết được tốc độ biến thiên (tốc độ thay đổi) của một hàm số*. Các bạn có biết được điều này quan trọng thế nào không? Với đạo hàm, bất cứ ở đâu có sự thay đổi, ở đó chúng ta sẽ biết được nó thay đổi như thế nào: liệu đại lượng đó đang tăng hay đang giảm hay đang không thay đổi, nếu là đang tăng vậy tăng nhanh hay tăng chậm…

Vận tốc đặc trưng cho sự thay đổi của quãng đường đi được, gia tốc là đặc trưng cho sự thay đổi của vận tốc theo thời gian vậy thì có gì là khó hiểu không khi trong chương trình vật lí người ta nói với các bạn rằng: vận tốc là đạo hàm của hàm quãng đường theo thời gian, còn gia tốc là đạo hàm của hàm vận tốc.

Nhiều bạn chắc còn muốn hỏi thêm vì sao đạo hàm là có được ý nghĩa thú vị này? Thật ra thì không khó hiểu lắm đâu: Chẳng hạn với một hàm số bất kì $y = f(x)$: Khi có sự thay đổi xảy ra, cụ thể là: x_0 tăng lên một lượng h tức là trở thành $x_0 + h$. Và hàm số sẽ thay đổi tương ứng từ $f(x_0)$ thành $f(x_0 + h)$. Tức là hàm số y đã thay đổi một lượng là $f(x_o + h) - f(x_o)$ tương ứng với khi biến x tăng một lượng là h. Như vậy tốc độ thay đổi của y theo x sẽ là tỉ số quen thuộc: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Tất nhiên tỉ số này chỉ mới cho ta biết tốc độ thay đổi trung bình của hàm số khi biến x tăng từ $x_0 \rightarrow x_0 + h$ mà thôi. Việc cho h tiến dần tới 0 sẽ giúp ta xác định được tốc độ biến thiên tức thời ngay tại thời điểm x_0. Và đó cũng chính là đạo hàm!
Thật là nhân văn phải không các bạn, mỗi khi gặp những trắc trở khó khăn biến động lớn lao trong cuộc đời làm chúng ta mất đi niềm tin vào cuộc sống. Nhiều người đã tìm được nguồn an ủi, hi vọng và sự tin tưởng vào "đạo", vào những đức tin chúng ta tín ngưỡng (riêng bản thân tôi rất có cảm tình với đạo phật). Cũng như vậy, mỗi khi nhà toán học phải đối diện với các hàm số đa dạng và phức tạp. Lo sợ trước sự biến thiên, thay đổi khó lường của chúng… họ tìm được niềm tin vững chắc bởi vì "đạo hàm" chưa bao giờ làm họ thất vọng.

Còn với mọi người trong chúng ta, nếu bạn là nhà kinh tế và muốn biết tốc độ tăng trưởng kinh tế nhằm đưa ra những quyết định đầu tư chứng khoán đúng đắn. Nếu bạn là nhà hoạch định chiến lược và muốn có những thông tin liên quan đến tốc độ gia tăng dân số ở từng vùng miền. Nếu bạn là nhà hóa học và muốn xác định được tốc độ phản ứng hóa học nào đó, hay nhà vật lí muốn tính toán vận tốc, gia tốc của một chuyển động… Đạo hàm sẽ là thứ mà chúng ta cần, rất đơn giản đầu tiên bạn cần có hàm số mô tả đại lượng đang được quan tâm, và sau đó chỉ cần đạo hàm nó. Còn tính đạo hàm như thế nào thì Sgk đã chỉ dẫn rõ ràng và chi tiết.

Để kết thúc câu chuyện tôi sẽ kể cho các bạn nghe về sự thật đằng sau việc công bố công trình vĩ đại của Newton: Newton có một thói quen kì lạ, ông không thích công bố những công trình phát minh của mình mặc dù ông biết rõ sự lớn lao của nó. Một hôm nhà thiên văn học Edmund Halley đến thăm Newton (lúc bấy giờ là viện sĩ nổi tiếng của viện hàn lâm khoa học hoàng gia Anh) để khoe với ông về một công trình tâm đắc của mình. Cụ thể là sau một thời gian miệt mài quan sát thiên văn Halley đã phát hiện ra được một sao chổi rất đặc biệt và thậm chí còn dự đoán được chu kì quỹ đạo của nó, ông tính được rằng 75 năm sau nó sẽ xuất hiện thêm lần nữa. Trái với sự chờ mong của Halley, Newton không thốt lên những lời trầm trồ khen ngợi, thay vào đó ông tạt cho Halley một gáo nước lạnh ngắt: Newton nói mấy cái phát hiện linh tinh này ông đã tìm ra từ mấy năm trước. Harley vô cùng căm phẫn, cho rằng Newton muốn nuốt trôi công trình của mình nên ông quyết định sẽ "ăn thua đủ" nếu Newton không giải thích rõ ràng chuyện này.
Hết cách Newton đành phải tiết lộ cho Halley biết những phát minh của mình đã giúp ông tính toán được rất nhiều các quỹ đạo của những thiên thể khác nhau. Halley đòi xem chúng, Newton dẫn ông ta đến một thùng đựng đầy giấy lộn nhưng đã không tìm thấy mấy tờ giấy có ghi lại tính toán về quỹ đạo sao chổi Halley. (Có lẽ mấy tờ giấy đó đã cuốn theo những dòng nước vội vã sau một cơn đau bụng bất ngờ của Newton chăng?) Newton đành phải giải thích rõ ràng, nào là ông ta đã phát minh ra vạn vật tương tác hút nhau như thế nào, rồi thì phát minh ra giải tích giúp ông ta tính toán quỹ đạo ra sao. Biết lực tương tác sẽ xác định được gia tốc (định luật 2 newton), có gia tốc thì làm phép toán ngược với đạo hàm (nguyên hàm – tích phân) sẽ giúp ông tìm được vận tốc. Có vận tốc lại tìm được hàm quãng đường từ đó mà biết quỹ đạo… Quá kinh ngạc với phát minh vĩ đại này nên Halley đã tìm mọi biện pháp từ dụ dỗ tới cứng rắn buộc Newton phải công bố. Newton đã dành 2 năm để viết là công trình này và xuất bản trong cuốn sách nổi tiếng: "Những nguyên lý toán học của triết học tự nhiên" (cái tên thấy không liên quan gì). Nghe đồn rằng Newton cố tình viết thật khó hiểu đến nỗi không có tới 10 người thời điểm đó đọc hiểu được cuốn sách trên.

Việc công bố công trình của mình một cách trễ nãi đã khiến giới khoa học rơi vào một cuộc tranh luận đáng tiếc. Về thực chất, Newton phát minh ra đạo hàm trước nhưng ông lại công bố sau

Leibniz. Mặc dù hai nhà toán học này độc lập với nhau xây dựng nên cơ sở của giải tích, tuy nhiên những người bạn của họ lại cho rằng người này ăn cắp ý tưởng của người kia và thế là có một cuộc cãi vã đầy xấu hổ trong lịch sử toán học…

Hình như bài viết đã quá dài rồi phải không? Tôi không chắc có nhiều độc giả đủ kiên nhẫn đọc đến khi tôi viết những dòng cuối cùng này. Dù sao nếu quả thật có ai đó như vậy, tôi thành thật gửi lời cảm ơn vì các bạn đã dành nhiều thời gian cho những chia sẻ của tôi. Chúc mọi người học toán thật thú vị và vui vẻ