

Học toán để làm gì?

vnhacker.blogspot.com/2019/08/hoc-toan-e-lam-gi.html

Một vách phòng làm việc của tôi được dùng làm bảng. Trên đó lúc nào cũng chi chít các ký hiệu toán học. Các bài toán viết ở đây không phức tạp, sinh viên năm nhất có thể hiểu được, nhưng đôi khi lời giải lại ảnh hưởng đến sự an toàn của hàng trăm triệu người dùng Internet. Trong căn phòng này, không ai hỏi học toán để làm gì, vì ai cũng hiểu không học toán thì không làm được gì cả.

Tôi thích học toán từ nhỏ, nhưng không giỏi toán. Tôi học chuyên toán cấp 2, đến lớp 9 thì rớt chuyên toán cấp 3. Năm lớp 10 tôi vẫn cố gắng tự học, mượn tập vở của bạn học chuyên toán về xem và vẫn siêng giải bài gửi cho tạp chí Toán học và Tuổi Trẻ. Nếu ai có lời giải hay và đẹp thì sẽ được nêu tên. Tôi còn nhớ bạn Trần Vĩnh Hưng, số nào cũng có tên. Gần đây tôi mới biết Hưng đã là giáo sư toán ở Mỹ. Tôi được nêu tên một lần, không phải trên tạp chí, mà là một ông thầy dạy toán nêu tên trước trường như một tấm gương... chịu khó gửi bài cho tạp chí, mặc dù chưa bao giờ được nêu tên.

Giữa năm lớp 11 tôi có máy vi tính và bắt đầu dành hết thời gian lên Internet. Tôi học ở trường càng lúc càng dốt, vì lười không muốn đi học thêm. Đến nỗi có lúc tôi được đưa vào "đội tuyển" có nguy cơ rớt tốt nghiệp. Cho đến nửa cuối năm lớp 12, tôi mới đi học thêm nghiêm túc vì sợ rớt đại học. Tôi chẳng còn mặn mà gì với toán, ráng học cũng chỉ là để đi thi điểm cao.

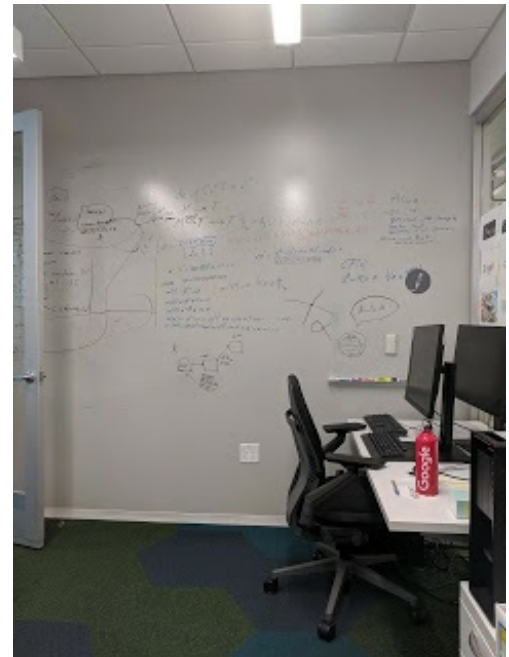
Vô đại học, chương trình đại cương hai năm đầu dạy rất nhiều toán, nhưng tôi học không vô. Sáu rưỡi sáng nhét cơm sườn hủ tếu còn chưa biết có vô không, chứ làm sao nhét vô nổi mấy cái ma trận với vành, trường, nhóm. Tôi không hiểu học mấy cái thứ đó để làm gì và cũng không ai buồn giải thích. Tôi trốn học, ở nhà học hack và đi làm kiếm tiền.

Những gì tôi vừa kể chẳng có gì mới, nhiều người đã trải qua những câu chuyện tương tự. Vậy mà sau 20 năm, bây giờ tôi vẫn đang học toán với một niềm vui không thể nào tả được. Những gì đã diễn ra tiếp theo đối với tôi thật nhiệm màu.

Tôi làm bảo mật ở một ngân hàng. Những năm đầu tiên công việc tốt, nhiều thứ để làm và họ trả lương cũng hậu hĩnh. Tôi quản lý một nhóm nhỏ, dần dần mọi người làm hết việc, tôi chẳng còn gì để làm, nên tôi tính nghỉ ra làm riêng. Tôi nói với sếp, nhưng sếp kêu thôi em cứ ở lại, chân trong chân ngoài, không cần nghỉ hẳn.

Tôi mở công ty, rồi đóng cửa mà không bán được bất kỳ sản phẩm nào. Tôi nhận ra mình thiếu kiến thức kinh doanh nên mua một đồng sách về đọc, rồi loay hoay thử nghiệm đủ thứ, nhưng cũng không cái nào thành công. Tôi không thấy nản, nhưng cũng không muốn phí thời gian. Câu hỏi nên làm gì vẫn mãi không trả lời được.

Tôi đọc trên blog của giáo sư Ngô Quang Hưng về cái vòng lẩn quẩn của sự nghiệp, đại loại như việc gì mình thích mình sẽ làm nhiều, làm nhiều mình sẽ giỏi, giỏi thì mình càng thích, thích lại làm nhiều, cứ thế lặp lại. Tìm và nhảy vào được cái vòng lẩn quẩn này là mấu chốt của thành công.



Cái vòng lẩn quẩn của tôi là gì? Suy đi tính lại, tôi thấy tôi giỏi nhất và thích nhất là bảo mật. Tôi cất công tìm kiếm trong một thời gian dài nhưng không nhận ra lợi thế cạnh tranh lớn nhất của tôi chính là công việc tôi đang làm. Thế là tôi quay lại làm bảo mật, "để coi mình đi được xa cỡ nào".

Đó là quãng thời gian thật tuyệt vời. Giống như người đi trong đường hầm đã lâu, tưởng sẽ kẹt mãi, nhưng rồi lại thấy ánh sáng le lói phía cuối đường, tôi dành tất cả sức lực của tuổi trẻ để chạy về phía ánh sáng, càng chạy mọi thứ càng sáng tỏ, càng sáng tỏ càng chạy được nhanh hơn! Trong vòng 3 năm, từ chỗ đi sau rất xa, tôi bắt kịp và đi cùng thế giới.

Tôi nghiệm ra rằng việc học giống như leo một chiếc cầu thang mà mỗi nấc thang có chiều dài vô tận. Người đứng ở một nấc thang không thể nào biết được cần phải đi ngang bao lâu mới đến được nấc tiếp theo. Nhiều người sẽ bỏ cuộc giữa chừng, chỉ một số ít may mắn và kiên trì mới đến được nấc thang kế tiếp, leo lên, rồi lại tiếp tục đi ngang. Kiên trì là do mình, may mắn là do trời.

May mắn lớn nhất của tôi có lẽ là tôi không sợ toán. Trong một thế giới có quá nhiều người sợ toán, thích học toán tạo ra một lợi thế cạnh tranh không hề nhỏ, khiến tôi có bản sắc riêng, khác biệt so với nhiều người khác.

Chính vì không ngán toán, tôi mới có cơ duyên đến với mật mã, công cụ chính của ngành bảo mật. Tôi phát hiện ra rằng thế giới có rất ít kỹ sư bảo mật biết mật mã. Tôi nghĩ phải cỡ 20 kỹ sư bảo mật mới có 1 người biết mật mã. Đơn giản vì muốn học mật mã trước tiên cần phải học toán, mà nhắc đến toán là nhiều người đã thấy hoa mắt, chóng mặt, không còn sức để học. Tôi thì ngược lại. Khi nhận ra thứ toán mà tôi từng say mê được dùng để bảo vệ Internet, tôi lao vào học quên ăn quên ngủ.

Tôi không có tài năng gì đặc biệt, phải vất vả lắm mới học được những thứ mà đối với nhiều người chỉ là toán căn bản. Có những cuốn sách tôi đã đọc 10 năm nay rồi, nhưng vẫn chưa hiểu hết. Chỉ có điều, tôi chưa bao giờ muốn ngừng lại. Tôi như người đi chinh phục những vùng đất mới, càng khó khăn bao nhiêu càng thấy sung sướng bấy nhiêu.

Điều thú vị là kiến thức toán của tôi chẳng đâu vào đâu và thứ mật mã mà tôi đã học cũng chẳng cần những kiến thức toán học cao siêu. Chỉ cần sử dụng một ít toán mà học sinh chuyên toán cấp 2 có thể hiểu được, mật mã đã có thể bảo vệ cả Internet. Chỉ cần biết một chút xíu của thứ toán mà mật mã sử dụng, tôi đã có lợi thế cạnh tranh hơn rất nhiều người và đã trở thành chuyên gia trong lĩnh vực của mình. Thứ tưởng tượng nếu biết nhiều hơn một chút thì tôi còn có thể làm được gì nữa?

Nhưng đó là vì công việc của anh cần dùng toán, còn công việc và cuộc sống hàng ngày của tôi đâu cần đến toán?

Cảm ơn bạn đã hỏi. Tôi cũng đã từng hỏi như vậy.

Có người nói học toán giống như tập thể dục. Bạn có thể sống mà không cần tập thể dục, nhưng tập thể dục sẽ giúp bạn khỏe mạnh và do đó nâng cao chất lượng cuộc sống. Một khoa học gia người Mỹ từng nói rằng học toán giống như nâng cấp firmware cho bộ não, không bỏ bê ngang thì cũng sẽ bỏ bê dục. Sự thật là thế giới tự nhiên được thống trị bởi toán học và học toán là cách tốt để hiểu thêm về thế giới mà chúng ta đang sống. Nhà bác học lừng danh Richard Feynman nói rằng ngôn ngữ của Chúa là giải tích. Nếu những ý kiến này vẫn chưa thuyết phục bạn, để tôi nói bạn nghe phần còn lại của lý do mà tôi học toán.

Tôi học toán vì toán học quá đẹp. Học toán đem lại cho tôi quá nhiều niềm vui, khiến câu hỏi học để làm gì lảng vẳng như câu hỏi con nít chơi năm mười để làm gì. Học cho vui, như vậy chưa đủ hay sao? Kỳ thực con người có rất nhiều thú vui không đem lại lợi ích gì. Chiêm ngưỡng một bức tranh, đọc một cuốn truyện trinh thám, xem một bộ phim, nghe một bản nhạc, v.v. mình thích thì mình làm thôi, chẳng cần lý do. Bạn sẽ nghĩ sao nếu tôi nói rằng học toán cũng có thể đem lại niềm vui, toán học cũng có tính giải trí rất cao?

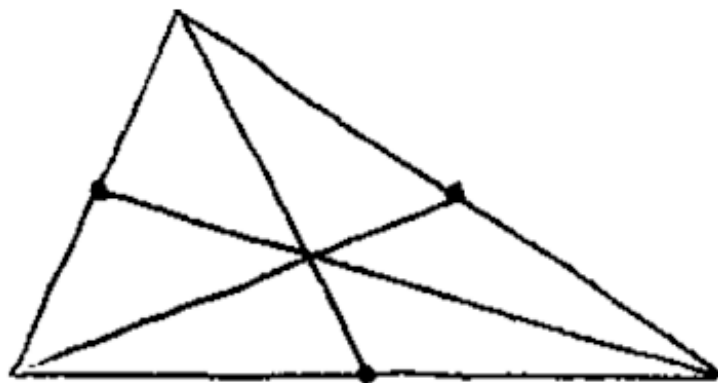
Toán học bắt nguồn từ những vấn đề rất cụ thể trong cuộc sống hàng ngày. Người Hy Lạp làm toán vì họ muốn đo lường các vật thể. Nhưng rồi, rất nhanh, toán học trở thành trò chơi, câu hỏi không còn là để làm gì mà là trò này chơi có hay không! Bao nhiêu bộ óc kiệt xuất nhất của nhân loại đã chơi trò chơi toán học, học toán là cách để người bình thường như chúng ta tham gia cùng với họ. Còn gì thú vị hơn việc có thể gặp gỡ làm quen với những Fermat, Euler hay Abel?

Các loại hình nghệ thuật hay các môn thể thao mà chúng ta thích thú, xét cho cùng, cũng chỉ là trò chơi, để ta tạm thời thoát khỏi cái tẻ nhạt của cuộc sống hàng ngày. Toán học, nhìn theo góc độ này, là đỉnh cao của nghệ thuật giải trí, bởi nó diễn ra hoàn toàn trong trí tưởng tượng của con người, không bị giới hạn bởi không gian, thời gian hay các giác quan. Bertrand Russel, nhà toán học lỗi lạc người Anh đầu thế kỷ 20, viết rằng (dịch bởi Google Translate, một công nghệ không thể tồn tại nếu không có toán):

Toán học, nhìn cho đúng, không chỉ có sự thật, mà còn có vẻ đẹp tối thượng, một vẻ đẹp lạnh lùng và khắc khổ, giống như điêu khắc, không phụ thuộc vào các bản chất yếu đuối của chúng ta, không dựa vào những cái bầy tụyet trần của hội họa hay âm nhạc, nhưng thuần khiết tụyet vời và hoàn hảo nghiêm khắc như chỉ có nghệ thuật vĩ đại nhất mới có thể thể hiện.

Bạn không cần phải giỏi toán, không cần phải là một nhà toán học mới có thể cảm nhận được vẻ đẹp mà ông Russel mô tả. Tôi nghĩ có kiến thức sẽ giúp ích phần nào, nhưng có rất nhiều kết quả toán học sơ cấp đẹp như mơ mà ai cũng có thể thấy được.

Bạn hãy lấy một tờ giấy và một cây bút. Bạn đi lấy đi, tôi sẽ chờ. Bạn hãy vẽ một hình tam giác. Tiếp theo bạn nối mỗi đỉnh với điểm chính giữa của cạnh đối diện. Bạn thấy gì? Ba đường bạn vừa vẽ, gọi là đường trung tuyến, giao nhau ở một điểm. Có đẹp quá đi không chứ? Ba đường thẳng ngỡ là chẳng có liên quan gì với nhau lại có một điểm chung. Tại sao hình tam giác lại có tính chất này? Xin để dành làm bài tập về nhà cho bạn đọc.



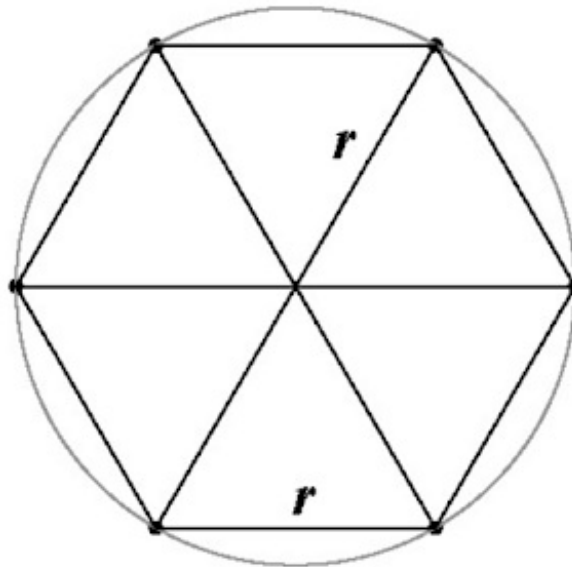
Hình 1: chụp từ cuốn sách Measurement của Paul Lockhart. Một cuốn sách rất đáng đọc nếu bạn muốn giải trí bằng toán.

Tiếp theo bạn hãy vẽ một hình tròn. Ký ức toán học đầu tiên của tôi là ngồi thẳng, xếp hai tay lên bàn và đọc to theo các bạn cùng lớp: chu vi của hình tròn là 2 nhân pi nhân bán kính, viết là $C = 2 * \pi * r$. Công thức này nói rằng tỷ số giữa chu vi và đường kính của một đường tròn, bất kể lớn bé thế nào, là một hằng số. Nếu lấy nửa chu vi nhân với pi thêm lần nữa ta sẽ có diện tích hình tròn, tức là $A = \pi * r * r$.

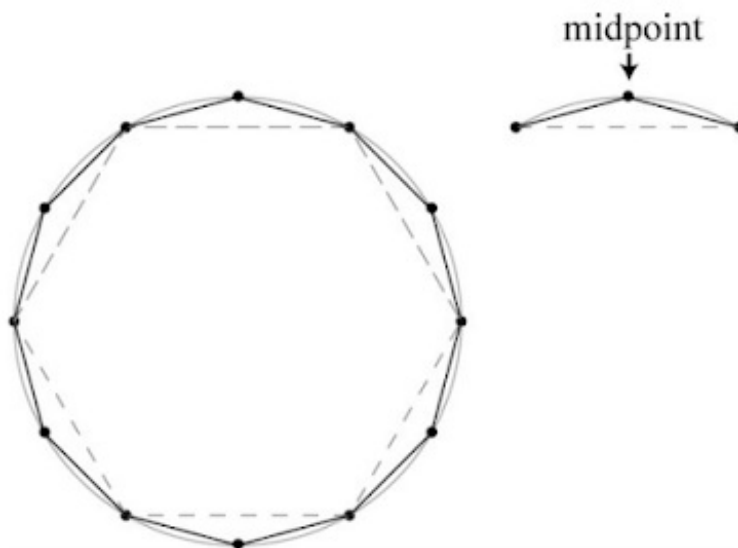
Có lạ lùng không chứ? Không có lý do gì để tỷ lệ giữa chu vi và đường kính hay tỷ lệ giữa diện tích

và bình phương bán kính của mọi đường tròn lại bằng nhau và bằng một con số xuất hiện ở khắp mọi nơi trong toán học và đời sống. Nhưng đây là sự thật. Nó đúng ở đây trên trái đất, đúng ở trên Mặt Trăng, Sao Hỏa và đúng ở mọi nơi trong vũ trụ này.

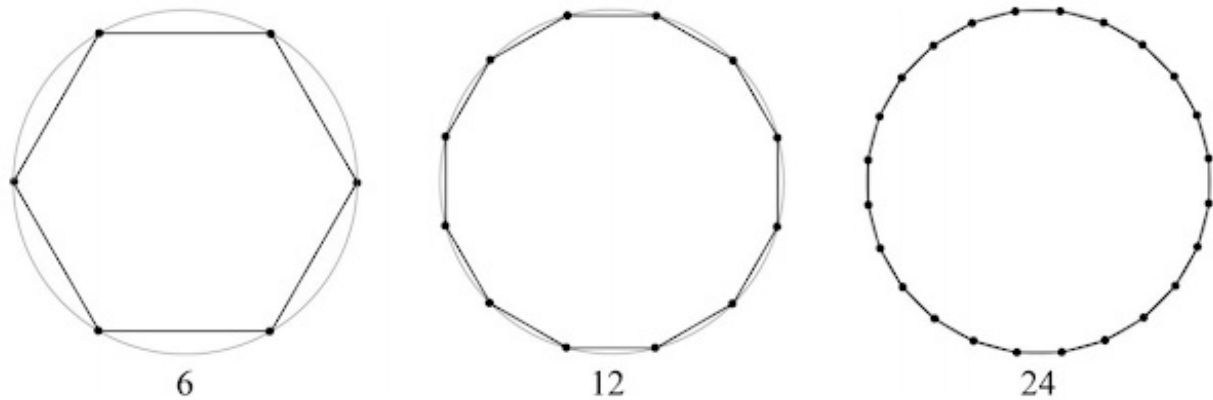
Làm sao người ta tính được số pi? Để ý rằng chúng ta dễ dàng tính diện tích hay chu vi của hình vuông hay hình chữ nhật, đơn giản vì đường thẳng dễ đo hơn đường cong. Dựa vào quan sát này, từ hơn hai nghìn năm trước, Archimedes (vâng, chính cái ông nhảy ra khỏi bồn tắm vừa chạy vừa la Eureka -- tôi chỉ thắc mắc sau đó ông có bị vợ chửi hay không?) đã nghĩ ra một cách tính hết sức độc đáo.



Hình 2: hình lục giác có mỗi cạnh bằng chiều dài bán kính. Hình 2, 3, 4 chụp từ cuốn Infinite Powers, một cuốn sách đáng đọc cho những ai muốn biết học giải tích để làm gì.



Hình 3: chọn điểm chính giữa mỗi cung tròn để tạo ra hình thập nhị giác từ hình lục giác.



Hình 4: có thể thấy rõ càng tăng số cạnh thì chu vi của hình lục giác càng tiệm cận chu vi của hình tròn.

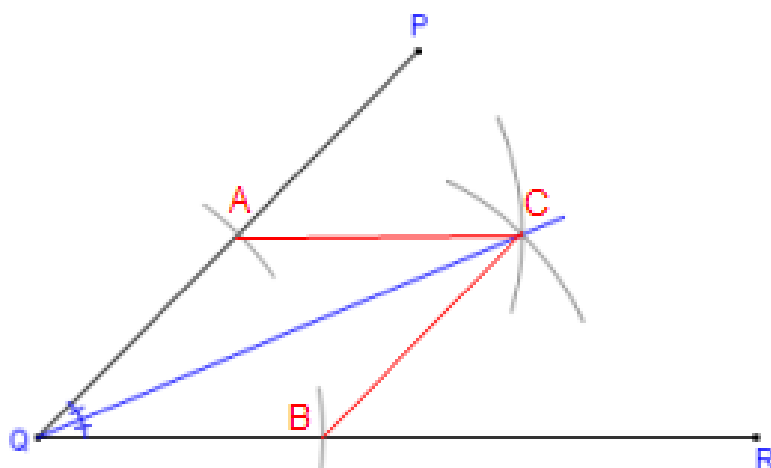
Đầu tiên (hình 2) ông ấy vẽ một hình lục giác có chiều dài mỗi cạnh bằng bán kính hình tròn. Chu vi của hình lục giác sẽ là $6 * r$. Rõ ràng chu vi của hình tròn lớn hơn chu vi của hình lục giác, cho nên Archimedes suy ra π phải lớn hơn 3.

Rồi Archimedes liên tục nhân đôi số cạnh của hình đa giác (hình 3 và hình 4). Vì các cạnh đều là đường thẳng, Archimedes "dễ dàng" tính được chu vi của mỗi đa giác. "Dễ dàng" trong ngoặc kép vì Archimedes không có tiền mua máy tính Casio nên đã phải tính bằng tay từng căn bậc hai một. Bằng cách này, Archimedes đã ước lượng được rằng $3 + 10/71 < \pi < 3 + 10/70$.

Như tác giả cuốn Infinite Powers đã viết, số π nằm giữa hai con số gần như giống nhau, chỉ khác nhau ở chỗ số đầu có mẫu số là 71, số sau là 70. Số sau thu gọn lại chính là $22/7$, một xấp xỉ rất nổi tiếng của π mà mọi học sinh sẽ được học và một số người vẫn nhầm tưởng đó chính là giá trị thật của π .

Đối với tôi, phương pháp của Archimedes không khác gì một câu chuyện hay có thể đọc đi đọc lại nhiều lần không biết chán. Sau Archimedes, bao nhiêu nhà toán học đã nghĩ ra rất nhiều "câu chuyện" khác để tính xấp xỉ π . Bây giờ người ta biết rằng không có cách nào tính chính xác π , nhưng vẫn có thể tính π chính xác đến bao nhiêu cũng được. Không biết chính xác là bao nhiêu nhưng có thể tính chính xác đến bao nhiêu cũng được, nghe có thú vị không kia chứ?

Tiếp theo, bạn hãy đi tìm một chiếc compa và thước kẻ. Bạn hãy vẽ một góc bất kỳ, rồi dùng compa theo hướng dẫn ở hình 5 để chia đôi góc đó.



Hình 5: chia đôi một góc bằng compa và thước kẻ.

Câu hỏi là làm sao chia ba một góc cũng bằng thước kẻ và compa? Từ chia đôi lên chia ba, ngỡ là dễ, ai dè khó còn hơn lên trời. Hai bài toán thoạt nhìn thì rất giống nhau, nhưng kỳ thực lại thuộc về

hai thế giới rất khác nhau. Người Hy Lạp bắt đầu đi tìm đáp án từ trước công nguyên, nhưng mãi đến cuối thế kỷ 19 mới có câu trả lời. Một câu trả lời rất can đảm: không có cách nào cả.

Làm sao để chứng minh một bài toán là *không* có lời giải? Bằng một lập luận cực kỳ tài tình như sau. Để chia ba một góc thì cần phải giải một phương trình bậc ba. Đến thế kỷ 19 người ta đã biết nghiệm phương trình bậc ba được biểu diễn bằng căn bậc ba. Nhưng bằng thước kẻ và compa chúng ta chỉ có thể tính được căn bậc hai, suy ra điều phải chứng minh!

Tim tôi luôn có chỗ cho những chứng minh không thể (proof of impossibility) như vậy. Chúng là hiện thân của vẻ đẹp tối thượng mà ông Russel nói đến. Không cần biết em là ai, không cần biết em từ đâu, không cần biết em ngày sau, nhưng em sẽ không thể nào chia ba được một góc bằng thước kẻ và compa! Sự tồn tại của các chứng minh không thể còn đem đến cho tôi hi vọng. Mỗi khi không giải được bài toán nào đó, tôi thường len lén hi vọng chắc là đề sai hoặc là bài này không giải được!

Sẽ là một thiếu sót cực lớn nếu nói về vẻ đẹp của toán học mà không nhắc gì đến số nguyên tố.

Một số tự nhiên n được gọi là chia hết cho một số tự nhiên m khi có số tự nhiên k sao cho $n = m * k$. Số nguyên tố là những số tự nhiên chỉ chia hết cho 1 và chính nó. Ví dụ như 2, 3, 5, 7, 11, v.v. là số nguyên tố. Số 6 không phải là số nguyên tố vì nó chia hết cho 2 và 3. Đây là những khái niệm ai cũng có thể hiểu được, nhưng ẩn đằng sau chúng là những câu hỏi cực kỳ thú vị và hóc búa.

Từ hơn hai nghìn năm trước, Euclid bằng một lập luận đẹp đến ná thở đã chứng minh được rằng có vô hạn số nguyên tố. Câu hỏi hiển nhiên là số nguyên tố phân bố như thế nào trong dãy số tự nhiên. Bằng trực quan có thể thấy rằng dãy số càng dài thì số nguyên tố xuất hiện càng thưa dần và có thể chứng minh rằng tồn tại dãy số có chiều dài bất kỳ mà trong đó không có bất kỳ một số nguyên tố nào cả.

Mỗi khi nhớ đến những kết quả này tôi lại tưởng tượng mình đang đi giữa sa mạc rộng bao la, không bờ bến. Ốc đảo, nơi tôi muốn đến, là số nguyên tố tiếp theo. Tôi không biết nó ở đâu, nhưng nhờ ông Euclid, tôi biết nó phải xuất hiện, không sớm thì muộn, cái sa mạc này phải có điểm dừng. Toán học cho tôi những niềm tin sắc đá như vậy, mà tôi không tìm thấy được ở bất kỳ nơi nào khác.

Ốc đảo nguyên tố của tôi xuất hiện sớm hay muộn, hóa ra không ai có thể đoán được cả! Nói cách khác, cho một dãy số bất kỳ, chưa ai tìm được công thức để dự đoán số nguyên tố tiếp theo là gì. Mấy nghìn năm nghiên cứu về số nguyên tố của loài người vẫn chưa ai giải quyết được bài toán này. Nếu bạn giải được, tên tuổi của bạn sẽ mãi mãi gắn liền với một trong những phát minh vĩ đại nhất của nhân loại, ngang hàng với những Newton hay Einstein.

Nếu sự phân bố của số nguyên tố quá khó hiểu, đây là một bài toán chưa ai giải được nhưng dễ hiểu hơn nhiều: liệu mọi số chẵn lớn hơn 2 có phải là tổng của hai số nguyên tố? Câu hỏi này, được đặt tên là giả thuyết Goldbach, đã có câu trả lời cho tất cả những số nhỏ hơn 400.000.000.000.000. Cho một số chẵn lớn hơn 2 và nhỏ hơn 400.000.000.000.000, chúng ta luôn tìm được hai số nguyên tố có tổng bằng số chẵn đó. Nhưng mấy trăm năm qua không một ai biết liệu nó có còn đúng nếu chúng ta thử với những số chẵn lớn hơn nữa!

Có loại hình giải trí nghệ thuật nào khác mà chỉ trong vòng vài phút, chỉ bằng trí tưởng tượng và kiến thức rất sơ đẳng, bạn đã chạm đến ngưỡng tri thức của cả nhân loại? Học toán giống như có chiếc cửa thần kỳ của Doraemon, chỉ cần tích tắc là ta có thể chu du đến những nơi chưa ai từng đặt chân đến. Còn gì sướng hơn nữa chứ?

Tôi viết bài này không nhằm mục đích gì khác ngoài việc chia sẻ cái sướng của người cảm thụ được vẻ đẹp của toán học. Đương nhiên đẹp hay xấu phụ thuộc rất nhiều vào góc nhìn. Có thể bạn chẳng

thấy những gì tôi viết ở đây là thú vị, không sao cả. Tôi chỉ muốn nói rằng học toán đã thay đổi hoàn toàn cuộc đời tôi và hi vọng rằng bạn sẽ cho toán một cơ hội thay đổi cuộc đời của bạn hoặc con em của bạn.

Tôi hiểu rằng đa số trong chúng ta không có trải nghiệm tốt khi học toán ở trường phổ thông hay đại học. Tôi cam đoan với bạn đây là vấn đề chung, không chỉ ở Việt Nam mà trên cả thế giới. Toán học được dạy một cách khô cứng, và, do đó, được học một cách máy móc. Không sao cả, hãy lạc quan lên, trường học không phải là nơi duy nhất chúng ta có thể học. Tôi chưa bao giờ có bằng đại học, nếu tôi có thể học toán thì ai cũng có thể học được cả. Điều duy nhất chúng ta cần là một tư duy cởi mở, dám thử cái mới, còn lại để toán lo!

Chúc may mắn và hi vọng rồi bạn cũng sẽ nhìn các chứng minh và thốt lên, ôi sao mà đẹp quá!